

Wie finden Studierende eine Ausgleichsgerade?¹

M. ALEJANDRA SORTO UND ALEXANDER WHITE, SAN MARCOS, LAWRENCE M. LESSER, EL PASO

¹ Original: „Understanding Student Attempts to Find a Line of Fit“ in Teaching Statistics 33 (2011) 2, S. 49–52
Übersetzung: ELKE WARMUTH, BERLIN

Zusammenfassung: *Die Methode der kleinsten Quadrate zur Anpassung einer Geraden stellt für Studierende nicht den natürlichen Zugang dar. Wir stellen drei Aufgaben vor, die das Verständnis der Studierenden erforschen sollen.*

1 Einleitung

Eines der Prinzipien beim Lehren und Lernen ist das Anknüpfen an das Vorwissen der Lernenden (Bransford et al. 1999). Lehrende, die die Methode der kleinsten Quadrate zur Bestimmung einer Regressionsgeraden einführen wollen, müssen dabei die Vorstellungen und Fehlvorstellungen ihrer Studierenden zu diesem Thema berücksichtigen. Wie gehen Studierende vor, wenn sie aufgefordert werden, eine Gerade zu zeichnen, die „am besten zu den Daten passt“? Ähneln ihr Vorgehen der Methode der kleinsten Quadrate? Wenn ja, wie

können wir darauf aufbauen, um ein tieferes Verständnis zu erzeugen? Wenn nein, wie steuern wir um und rechtfertigen die Methode der kleinsten Quadrate?

Wie Lesser (1999a) zeigte, geben nur wenige Lehrbücher eine Argumentation für das Standardkriterium zur Anpassung einer Geraden an. (Das Standardkriterium minimiert natürlich den „Abstand“ zwischen der Geraden und den beobachteten Punkten, gemessen durch die Summe der Quadrate der vertikalen Abstände.) Lesser nennt eine Reihe von alternativen Abstandsmaßen und legt Gründe für die Bevorzugung der Summe der Quadrate der vertikalen Abstände dar. Er geht in seiner Diskussion allerdings schon von dem Ziel aus, einen Abstand zu minimieren.

Im vorliegenden Aufsatz stellen wir drei Aufgaben vor, die deutlich machen, dass die Abstandsminimierung für Studierende nicht notwendigerweise das natürliche Konzept ist. Wenn diese Aufgaben benutzt werden, um eine Diskussion über Anpassungsgeraden anzuregen, können sie ein Sprungbrett zu einer

ergiebigen Diskussion werden und die Vorstellungen der Studierenden verdeutlichen. Die Aufgaben waren Teil eines einführenden Statistik-Kurses von einer Unterrichtseinheit pro Woche auf dem Niveau eines 2. Studienjahres an der Texas State University, einer großen Universität im Südwesten der Vereinigten Staaten. An dieser Übung nahmen 18 Studierende teil, die meisten von ihnen waren entweder Hörer im Studiengang Industrielle Technologie oder zukünftige Mathematiklehrkräfte für Mittelschulen. Die Übung fand in der Mitte des Semesters statt, nachdem die Studierenden in univariate Methoden der Beschreibenden Statistik, sowohl graphisch als auch numerisch, und in elementare Wahrscheinlichkeitskonzepte eingeführt wurden. Vor der Bearbeitung der Aufgaben erhielten die Studierenden eine kurze Einführung in bivariate Daten und die Zielstellung, mit Hilfe einer Variablen eine Vorhersage für die andere zu treffen. Es wurde auch dargelegt, dass dies durch eine Gerade erreicht wird, die in das Streudiagramm (Punktwolke) eingepasst wird.

2 Aufgaben

Die Aufgaben waren in folgenden Kontext eingebettet:

Ein neuerer Aufsatz misst die Zufriedenheit von Personen in ihrem Beruf mit Hilfe eines Fragebogens, der 14 Fragen enthält. In der Tabelle 1 bezeichnet y die Punkte für die Zufriedenheit und x das Gehalt in Tausend Dollar für eine Stichprobe von 8 vergleichbaren Personen.

x	31	33	22	24	35	29	23	37
y	17	20	13	15	18	17	12	21

Tab. 1: Grad der Zufriedenheit (y) und Gehalt (x)

Im Zusammenhang mit diesem Beispiel wurden folgende Aufgaben gestellt:

Aufgabe 1: Abbildung 1 zeigt ein Streudiagramm der Daten. Zeichnen Sie die Gerade in dieses Streudiagramm, die am besten zu den Daten passt.

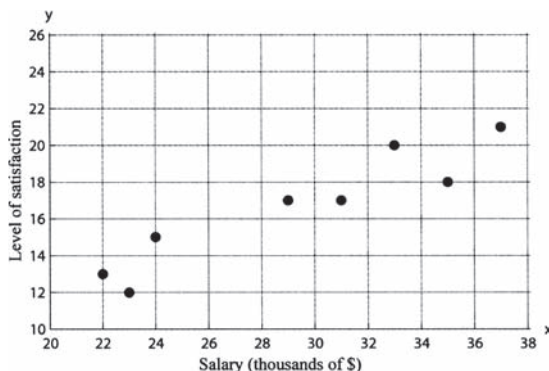


Abb. 1: Grad der Zufriedenheit (y) und Gehalt (x)

Aufgabe 2: Welches Kriterium haben Sie benutzt, um die Gerade festzulegen? Beschreiben Sie, was Sie gedacht haben, als Sie eine passende Gerade ausgewählt haben.

Aufgabe 3: Zwei Studenten haben unabhängig voneinander die ihrer Meinung nach beste Gerade gezeichnet. Die Graphen in Abbildung 2 zeigen ihre Geraden. Wenn Sie zu entscheiden hätten, welche der beiden Geraden besser zu den Daten passt, was wäre dann Ihre Wahl? Gibt es irgendetwas in diesem Zusammenhang, was Sie ausrechnen könnten?

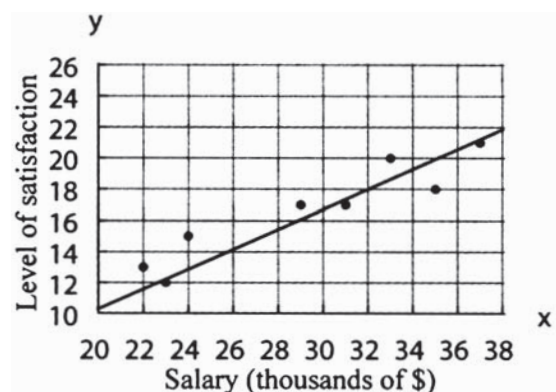
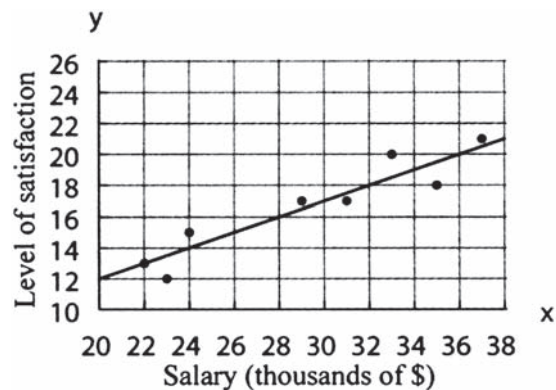


Abb. 2: Anpassungsgeraden zweier Studenten

3 Antworten der Studierenden

Die Antworten auf die erste und zweite Aufgabe wurden durch den Lehrer und einen unabhängigen Wissenschaftler in drei große Gruppen eingeteilt. Die erste dieser Gruppen kann als Verallgemeinerung des Mediankonzepts von Mitte angesehen werden. Acht Studierende haben sich entschieden, eine Gerade zu zeichnen, die die Datenpunkte halbiert in dem Sinne, dass die eine Hälfte oberhalb der Geraden und die andere Hälfte unterhalb der Geraden liegt. Ein Student schrieb zum Beispiel: „Ich versuchte eine Gerade in der Mitte der Daten zu finden, 1/2 darunter [und] 1/2 darüber.“

Die zweite Antwortkategorie kann als eine Verallgemeinerung des Durchschnittskonzepts von Mitte

angesehen werden. Ein Student schrieb z. B. „Meine Gerade stellt die Durchschnittspunkte der Mittelpunkte dar.“ Es sieht so aus, als ob sich dieser Student vorstellt, dass er die Gerade durch die Mittelpunkte verschiedener Punktgruppen zieht. Dies ist ziemlich verwandt zur Argumentation für die Median-Median-Gerade (Walters et al. 2006, Wilson 2010). Das Konzept des Durchschnitts aller Punkte kann als Ausgangspunkt für eine Diskussion der „kleinsten Quadrate“-Geraden benutzt werden. Anhand zahlreicher verschiedener numerischer Beispiele können die Studierenden zu der Vermutung gelangen, dass die allgemeine „kleinste Quadrate“-Gerade durch den Punkt (\bar{x}, \bar{y}) verläuft (Vonder Embse 1997). Lesser (1999b) beschreibt eine Unterrichtsstunde an einer High-School, in der die Schüler zunächst den Punkt (\bar{x}, \bar{y}) einzeichneten und dann den Anstieg der Geraden durch diesen Punkt solange variierten, bis sie die beste Anpassung gefunden hatten.

Die Antworten der dritten Kategorie versuchten den Trend in den Daten dadurch zu erfassen, dass sie eine Gerade durch den ersten und letzten Datenpunkt legten oder „eine Gerade, die am nächsten zu allen Punkten und zum Trend der Daten liegt“ zeichneten. Die Strategie des Verbindens zweier Punkte erinnert an die Beobachtung von Hung (1997), dass es immer eine Gerade gibt, die die Summe der *absoluten* Abstände minimiert und durch mindestens zwei verschiedene Datenpunkte verläuft. In der weiteren Diskussion versuchten einige dieser Studenten unter den möglichen Geraden eine mittlere bzw. unter den möglichen Anstiegen einen mittleren zu finden. Edwards (2005) empfiehlt, an diese Intuitionen anzuknüpfen, wenn für Studienanfänger Methoden der besten Anpassung durch eine Gerade eingeführt werden sollen. Er schlägt als Alternative zur Standardmethode der kleinsten Quadrate vor, alle $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ Geraden zu betrachten, die durch die möglichen Punktepaare verlaufen, und für die Anpassungsgerade den Median aller Anstiege und den Median aller Achsenabschnitte zu wählen. Lipovetsky & Conklin (2001) zeigen, dass der Anstieg der „kleinsten Quadrate“-Geraden ein gewichtetes Mittel aus den Anstiegen der $\frac{n(n-1)}{2}$ „Paar“-Geraden ist, wobei die Gewichte durch den „Einfluss (leverage)“ jedes Punktepaars gemessen wird. (Der Einfluss wird gemessen als Abstand der x -Koordinate eines Datenpunkts vom Durchschnitt aller x -Koordinaten, siehe z. B. Bock et al. (2007, S. 204).)

Eine Schwierigkeit, die mit den Antworten auf Frage 1 und Frage 2 verbunden ist, besteht darin, dass

Studierende, obwohl sie eine gute Anpassungsgerade einschätzen können, Schwierigkeiten haben, ihr Anpassungskriterium zu operationalisieren. Beispielsweise waren Studierende, die ein Median-Kriterium zur Anpassung verwendeten, nicht in der Lage zu sagen, warum sie nicht eine waagerechte Gerade gewählt haben, bei der die Hälfte der Punkte oberhalb und die Hälfte der Punkte unterhalb liegt ($\bar{y} = \text{median der } y$). Sie sagten lediglich, dass die waagerechte Gerade „eben nicht passt“. Bei der Frage 3 hatten die Studierenden zwischen zwei möglicherweise guten Anpassungsgeraden die bessere auszuwählen. Außerdem waren sie aufgefordert, darüber nachzudenken, ob sie etwas berechnen können, um den Unterschied zu quantifizieren. Somit zielte die Frage 3 auf ein zweites und oft implizites Ziel beim Anpassen einer Geraden, nämlich die Güte der Anpassung zu messen. Bei dieser Frage wählten die meisten Studierenden den linken Graphen. Es überrascht nicht, dass bei vielen Studenten die Begründung mit ihrer Antwort auf Frage 2 konsistent war: „[linker Graph]: im wesentlichen drei Punkte oberhalb, drei Punkte unterhalb, der letzte Punkt ist fast auf der Geraden“; „Dichter zur Mitte oder zum Durchschnitt aller Punkte“ und „Der linke Graph folgt dem Trend der Daten besser“. Es tauchte jedoch eine neue Kategorie von Antworten auf. Obwohl keiner bei der Frage 2 den Abstand der Punkte zur Geraden erwähnte, bezogen sich nun vier Studierende auf diesen Abstand. Manche sagten, dass die linke Gerade „... eine größere Nähe zu mehr Punkten hat als die rechte“ oder „weil die Gerade dichter zur Mehrzahl der Punkte ist“. Einige wenige Studenten bezogen sich spezifischer auf die Varianz oder Standardabweichung um die Gerade. Für die Unterrichtssituation ist die letzte Antwort besonders wichtig, ermöglicht sie doch den direkten Übergang zum Konzept der Minimierung der Summe der Abweichungsquadrate.

4 Schlussfolgerungen für die Lehre

Es ist interessant, dass die ersten Vorstellungen der Studierenden zur Anpassung einer Geraden an Daten die Idee der Minimierung der Abstände zwischen den Punkten und der Geraden (auch nur informell) nicht enthielten. Stattdessen liefen die Anfangsvorstellungen darauf hinaus, die Gerade in die Mitte zu platzieren, sei es so, dass die gleiche Anzahl von Punkten oberhalb und unterhalb der Geraden liegt, sei es durch einen „Mittelwert“ der Punkte oder indem man irgendwie den mittleren Trend der Daten findet. Dies ermöglicht wichtige Schlussfolgerungen für die Lehre der „kleinsten Quadrate“-Regressionsgeraden. Erstens könnten die Studierenden ohne eine Diskussion

ihrer natürlichen Ansätze zu Anpassungsgeraden im Vergleich zu den mathematischen Standardmethoden Schwierigkeiten haben, das der Regression zugrunde liegende Konzept zu verinnerlichen. Zweitens könnten die Studierenden ihre Vorstellung von bester Anpassung fehlerhaft in das Konzept der „kleinsten Quadrate“-Methode projizieren. Sie könnten z. B. denken, dass die „kleinste Quadrate“-Gerade die Eigenschaft hat, dass dieselbe Anzahl von Punkten oberhalb wie unterhalb der Geraden liegt. Oder, dass ihre Gleichung durch ein einfaches arithmetisches Mittel der Punkte oder der Anstiege zwischen den Punkten bestimmt ist. Oder sogar, dass die „kleinste Quadrate“-Geraden etwas mit Parabeln zu tun hat.

Wenn erst einmal die unterschiedlichen Ideen über Anpassungsgeraden in der Gruppe diskutiert worden sind, kann Übereinstimmung darüber erzielt werden, dass der Abstand zwischen der Geraden und den Beobachtungspunkten minimiert werden soll. Aber wie messen wir den totalen oder mittleren Abstand? An dieser Stelle können die Studierenden mit verschiedenen Abstandsmaßen konfrontiert werden (Lesser 1999a). Wenn sie die Wahl der (Summe der Quadrate der) vertikalen Abweichungen akzeptiert haben, können die Studierenden Software nutzen, um die Summe der Quadrate zu visualisieren (NCTM n. d.; siehe auch die applets in Bush et al. 2009, z. B. <http://hadm.sph.sc.edu/COURSES/J716/demos/LeastSquares/LeastSquaresDemo.html>)¹.

Anmerkung

1 Zugriff der Übersetzerin am 04.11.2011

Literatur

- Bock, D. E.; Velleman, P. F.; DeVeaux, R. D. (2007): *Stats: Modeling the World* (2nd edn.). Boston, MA: Pearson.
- Bransford, J. D.; Brown, A. L.; Cocking, R. R. (Hrsg.) (1999): *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School*. Washington DC: National Academy Press.

- Bush, S.; Menzies, G.; Thorp, S (2009): An array of online teaching tools. In: *Teaching Statistics* 31(1), S. 17–20.
- Edwards; M. T. (2005): Promoting understanding of linear equations with the median-slope algorithm. In: *Mathematics Teacher* 98 (6), S. 414–425.
- Hung, R. (1997): Visually fitting a least-absolute-deviation regression line. In: *Chance* 10 (3), S. 52–53.
- Lesser, L. (1999a): The ‚Ys‘ and ‚why nots‘ of line of best fit. In: *Teaching Statistics* 21(2), S. 54–55.
- Lesser, L. (1999b): Making the black box transparent. In: *Mathematics Teacher* 92(9), S. 780–784.
- Lipovetsky, S.; Conklin, W. M. (2001): Regression as weighted mean of partial lines: Interpretation, properties, and extensions. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 32(5), S. 697–706.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (n. d.) (1961): Understanding the least squares regression line with a visual model: Measuring error in a linear model. <http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap7/7.4/index.htm> (Zugriff der Übersetzerin 05.11.2011).
- Vonder Embse, C. (1997): Visualizing least-square lines of best fit. In: *Mathematics Teacher* 90(5), S. 404–408.
- Walters, E. J.; Morrell, C. H.; Auer, R. E. (2006): An investigation of the median-median method of linear regression. In: *Journal of Statistics Education* 14(3), <http://www.amstat.org/publications/jse/v14n2/morrell.html> (Zugriff der Übersetzerin 05.11.2011).
- Wilson, D. C. (2010): The median-median line. In: *Mathematics Teacher* 104(4), S. 262–267.

Anschrift der Verfasser

M. Alejandra Sorto and Alexander White
Texas State University at San Marcos, USA
sorto@txstate.edu
aw22@txstat.edu

Lawrence M. Lesser,
The University of Texas at El Paso, USA
lesser@utep.edu